

Reibung und geometrische Form

Vogelpohl, Georg

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 21, 1969,
S.327-344



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Reibung und geometrische Form

Von Georg Vogelpohl

(Eingegangen am 18. 7. 1968)

1. Einleitung

Bei der Gleitbewegung sich berührender fester Körper treten Verluste an Energie und Material auf, sie werden allgemein als Reibungsverluste und Verschleiß bezeichnet. Weit verbreitet ist die Auffassung, daß diese Erscheinungen vorwiegend oder ausschließlich durch die Art der Stoffe bedingt sind; insbesondere werden Festkörpern und Flüssigkeiten Reibungszahlen unmittelbar zugeschrieben, und der Materialverlust soll fast allein durch die Verschleißfestigkeit gegeben sein.

Diese Betrachtungsweise entspricht veralteten Auffassungen. Es handelt sich nicht um Stoffeigenschaften, sondern um physikalische Vorgänge, die von anderen Bedingungen weit mehr abhängen als vom jeweiligen Material.

Vor allem ist die *geometrische Form der Gleitpartner* bisher nie beachtet, geschweige denn eine Untersuchung über deren Einfluß durchgeführt worden. Die Abhängigkeit der Reibungs- und Verschleißerscheinungen von der geometrischen Form ist aber weit größer als die vom Stoff: In einem konkreten Fall (500-t-Schere in einem Hüttenwerk) konnte bei gleichem Werkstoff unter denselben Betriebsbedingungen *nur durch Änderung der geometrischen Form* der Verschleiß von 10 mm im Jahr auf 0,1 mm in vier Jahren — also auf den vierhundertsten Teil gesenkt werden, in einem anderen (Walzwerkslager) war es durch gleichartiges Vorgehen und Hinzunahme einer Kühlung möglich, den Verschleiß von 1,5 mm/Tag auf 0,5 mm/Jahr, also auf rd. ein Tausendstel, zu vermindern. Das ist ein Beweis dafür, daß es sich beim Verschleißverhalten nicht unmittelbar um Stoffeigenschaften handeln kann; bei der Reibung ist es ähnlich.

Mit den hier vorgelegten Ausführungen soll die systematische Untersuchung beginnen. Zunächst wird ein Sonderfall aus dem Bereich der Dissipations-Energetik betrachtet, in dem tatsächlich eine Unabhängigkeit der Energieverluste von der geometrischen Form zu verzeichnen ist. Es handelt sich um das zylindrische Radiallager im Bereich vollkommenen Tragens der Last durch den Ölfilm, die Geometrie liegt mit den gegebenen Hauptabmessungen und der veränderlichen Exzentrizität fest. Von einer gewissen Exzentrizität an bleibt der Leistungsverlust konstant, selbst wenn das Lagerspiel gegen unendlich geht.

2. Die Geometrie des zylindrischen Radiallagers

Der Gleitraum zwischen zwei Kreiszyklindern mit parallelen Achsen ist mit dem Durchmesser D , der axialen Ausdehnung B , dem Lagerspiel S und der Exzentrizität e oder der engsten Schichtdicke h_0 eindeutig beschrieben, Abb. 1.

Beim realen Lager ist die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte von Schale und Welle zur Lastangriffsrichtung geneigt, das folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen für das Tragen der Welle durch den Ölfilm, also aus physikalischen Gründen. Diese Neigung hat aber auf die hier durchgeführten Betrachtungen keinen Einfluß und wird daher außer acht gelassen.

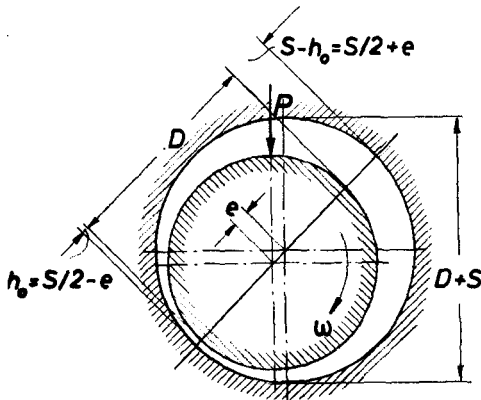


Abb. 1. Gleitraum des Radiallagers, allgemeiner Fall.

D Wellendurchmesser,
 $D + S$ Bohrungsdurchmesser,
 S Lagerspiel,
 e Exzentrizität
 h_0 geringste Tragschichtdicke,
 P Belastung,
 ω Winkelgeschwindigkeit.

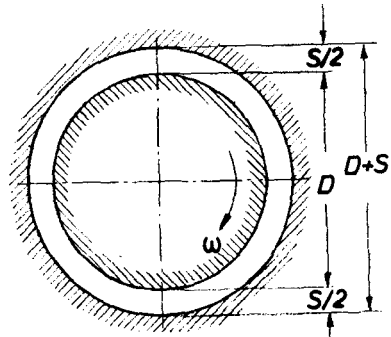


Abb. 2. Gleitraum des Radiallagers, Sonderfall $e = 0$, konzentrische Zylinder.

Abb. 1 zeigt den allgemeinen Fall, Abb. 2 den Sonderfall $e = 0$, also konzentrische Zylinder, der von *N. Petroff* (1883) rechnerisch und von *Couette* (1890) experimentell untersucht wurde; hier liegt die Geometrie durch D , B und S bereits fest. In Abbildung 3 ist der andere Extremfall $S = \infty$ wiedergegeben; wenn Zylinder und Ebene die Gleitpartner bilden, dann genügen D , B und h_0 zur Beschreibung der geometrischen Form.

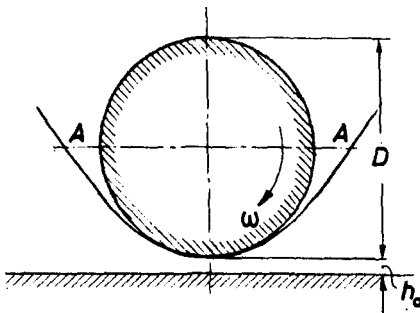


Abb. 3. Gleitraum des Radiallagers, Grenzfall $S = \infty$, Zylinder gegen Ebene. Der Scheitel-Krümmungskreis der Parabel $A - A$ hat denselben Radius wie der Zylinder.

Durch Einführung des relativen Lagerspiels $\psi = S/D$ und der relativen Exzentrizität $\varepsilon = 2e/S$ als Ähnlichkeitsgrößen werden die vier Veränderlichen des allgemeinen Falles nach Abb. 1 auf drei zurückgeführt.

Aus Abb. 1 ist die Beziehung $h_0 = S/2 - e$ abzulesen, diese stellt den Zusammenhang mit Abb. 3 her, in der mit S auch $e \rightarrow \infty$ geht.

Für die Rechnung hat noch die Parabel AA in Abb. 3 eine Bedeutung, deren Scheitel-Krümmungsradius $\varrho = D/2$ ist.

3. Die Gleichungen des zylindrischen Radiallagers

Am Umfang des mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich drehenden Zylinders üben die Scherspannungen in der Flüssigkeit ein Moment M aus, das mit ω multipliziert die in der Zeiteinheit dissipierte Energie $M \omega$ ergibt, M wird daher zweckmäßig als Dissipationsmoment bezeichnet. Das Integral über die Normalspannungen am Umfang des inneren Zylinders ergibt die Gegenkräfte zur äußeren Last P ; die die Größe der Scher- und Normalspannungen mitbestimmende Viskosität η wird für den ganzen Gleitraum als konstant angenommen. Mit der Umfangsgeschwindigkeit $U = D \omega/2$ ergibt sich die dissipierte Leistung zu

$$M \omega = K_G U \sqrt{2 P B U \eta}, \quad (1)$$

darin ist K_G ein zwischen 2 und 4 liegender Zahlenfaktor, für Rechnungen in der Praxis wird $K_G = 3$ empfohlen. Mit diesem Wert gilt Gl. (1), wenn die als Sommerfeldzahl So benannte Ähnlichkeitszahl

$$\text{So} = \frac{P \psi^2}{2 \eta U B} = \frac{\bar{p} \cdot \psi^2}{\eta \cdot \omega} \quad (2)$$

größer als eins ist. In der zweiten Form von Gl. (2) bezeichnet $\bar{p} = P/B D$ die spezifische Lagerlast.

Die Gl. (1) geht auf *Gümbel* (1914) zurück. Schreibt man die in der Zeiteinheit dissipierte Energie $M \omega$ in der Form

$$M \omega = f P U, \text{ so ist } f = M \omega / P U. \quad (3)$$

Der Faktor f , dessen Größe die dissipierte Energie kennzeichnet, wird sinn gemäß Dissipationsfaktor genannt. In dieser Form ist das eine logische Fassung im Bereich der Energiebetrachtungen und stellt eine korrekte Definition dar; für Radiallager lassen sich die Reibungszahlen nur gezwungen formulieren.

Der einfache Begriff der Reibungszahl hat zu vielen Irrtümern geführt und sollte daher nach Möglichkeit vermieden werden. *Gümbel* mußte mit ihm noch arbeiten und gab für das Radiallager den Ausdruck

$$f = K_G \sqrt{\frac{\eta \omega}{\bar{p}}} = K_G \sqrt{\frac{2 \eta B U}{P}} = K_G \sqrt{\text{Gü}}, \quad (4)$$

in dem

$$\text{Gü} = \frac{\eta \omega}{\bar{p}} = \frac{2 \eta B U}{P} = \frac{\psi^2}{\text{So}} \quad (5)$$

die Gümbelzahl bedeutet. Sie wurde von *L. Gümbel* (1914) durch unmittelbare Rechnung und gleichzeitig von *M. D. Hersey* (1914) aus Ähnlichkeitsbetrachtungen abgeleitet und müßte der beiden Urheber wegen eigentlich Gümbel-Hersey-Zahl benannt werden, eine Doppelschreibweise wie GüHe ist aber ungewohnt.

Der zweite Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (4) liefert mit $P U$ multipliziert die Gl. (1), sie enthält weder ψ , B/D noch ε und ist daher von der Geometrie des Gleitraumes unabhängig. Zwar handelt es sich um eine Näherung, da K_G keine Konstante ist, unter Ziffer 5 werden genaue Ergebnisse mitgeteilt.

Der erste Sonderfall $e = \varepsilon = 0$ und S klein gegenüber D oder $\psi \ll 1$, in der Größenordnung 10^{-3} , ergibt für die in der Zeiteinheit dissipierte Energie

$$M \omega = 2 K_P \eta B U^2 / \psi. \quad (6)$$

Der Faktor K_P wird gleich π für den ganz gefüllten voll umschließenden Kreisringraum, die Vollschaale; er wird gleich $\pi/2$ für 180° Umschließungswinkel, die Halbschaale. Für Rechnungen in der Praxis wird $K_P = 3$ empfohlen, dann gilt Gl. (6) für $So < 1$.

Diese Gleichung für $M \omega$ ist unter den erwähnten Voraussetzungen, $\varepsilon = 0$ und kleine ψ in der angegebenen Größenordnung, eine exakte Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen, sie wurde erstmalig von *N. Petroff* (1883) angegeben. Die Gl. (6) bleibt aber auch noch für kleine ε bis $\approx 0,5$ bei üblichem B/D mit guter Näherung gültig. Die zahlenmäßigen Zusammenhänge im Übergangsgebiet zwischen den Gln. (1) und (6), also in der Umgebung von $So = 1$, lassen sich namentlich wegen der Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr durch einfache Formeln wiedergeben, sie sind aber mit ausreichender Genauigkeit in Tabellen niedergelegt, Ziffer 5, und in einem Bereich von sechs Zehnerpotenzen der Sommerfeldzahl experimentell bestätigt. Daher werden die weiteren Betrachtungen auf mathematisch und physikalisch wohl begründeten Ergebnissen durchgeführt.

In dem *Petroffschen* Fall nach Gl. (6) ist die in der Zeiteinheit dissipierte Energie von der Geometrie abhängig, die Verluste nehmen mit vergrößertem Lagerspiel ab.

Der Gültigkeitsbereich der Gl. (1) mit $K_G = 3$, gegeben durch $So > 1$, entspricht Lagern mit schwerer Belastung und wird deshalb als Schwerlast-Bereich bezeichnet, die Gl. (6) beschreibt die Fälle mit geringen Lasten, aber hohen Geschwindigkeiten, ihr wird der Schnellaufbereich mit $K_P = 3$ und $So < 1$ zugeordnet. In diesem hängt die dissipierte Leistung von der Geometrie ab, im Schwerlastbereich dagegen nicht.

4. Die zweckmäßige Auftragung

Um die Abhängigkeit der Verluste von der geometrischen Form erkennen zu können, muß eine Darstellung gewählt werden, in der die Geometrie als unabhängige Veränderliche auftritt und die abhängigen Veränderlichen keine

die Geometrie beeinflussenden Faktoren mehr enthalten. Diese Möglichkeit ist durch Gl. (6) sofort gegeben, wenn sie in der Form

$$\frac{M \omega}{2 K_P \eta B U^2} = \frac{1}{\psi} \quad (7)$$

geschrieben wird. Die linke Seite enthält nur Abmessungen, die zwar die Größe, aber nicht die geometrische Form beeinflussen, die rechte Seite mit dem relativen Lagerspiel ψ dagegen bestimmt nur die geometrische Gestalt. Dem widerspricht nicht, daß auf der linken Seite die Breite B und damit implizit das Verhältnis B/D vorkommt, denn der Gl. (6) liegt eine ebene, also von der Axialausdehnung unabhängige Strömung zugrunde. Somit ist Gl. (7) auf die Einheit der Lagerbreite bezogen, in dieser Form ergibt sie auch ein geeignetes Vergleichsmaß, da in den technisch-sinnvollen Verhältnissen die Abhängigkeit von B/D für die vorliegenden Betrachtungen von untergeordneter Bedeutung ist.

Abb. 4 zeigt den einfachen Verlauf von $1/\psi$; für alle Lager im Schnellaufbereich muß der Leistungsquotient nach Gl. (7) auf der $1/\psi$ -Geraden liegen. Werden im besonderen die für die Rechnungen in der Praxis empfohlenen Werte $K_G = K_P = 3$ verwendet, so liegt der Punkt $So = 1$ noch auf der Geraden $1/\psi$, von da an verläuft dann der Leistungsquotient horizontal nach Gl. (1) unabhängig von ψ im Schwerlastbereich.

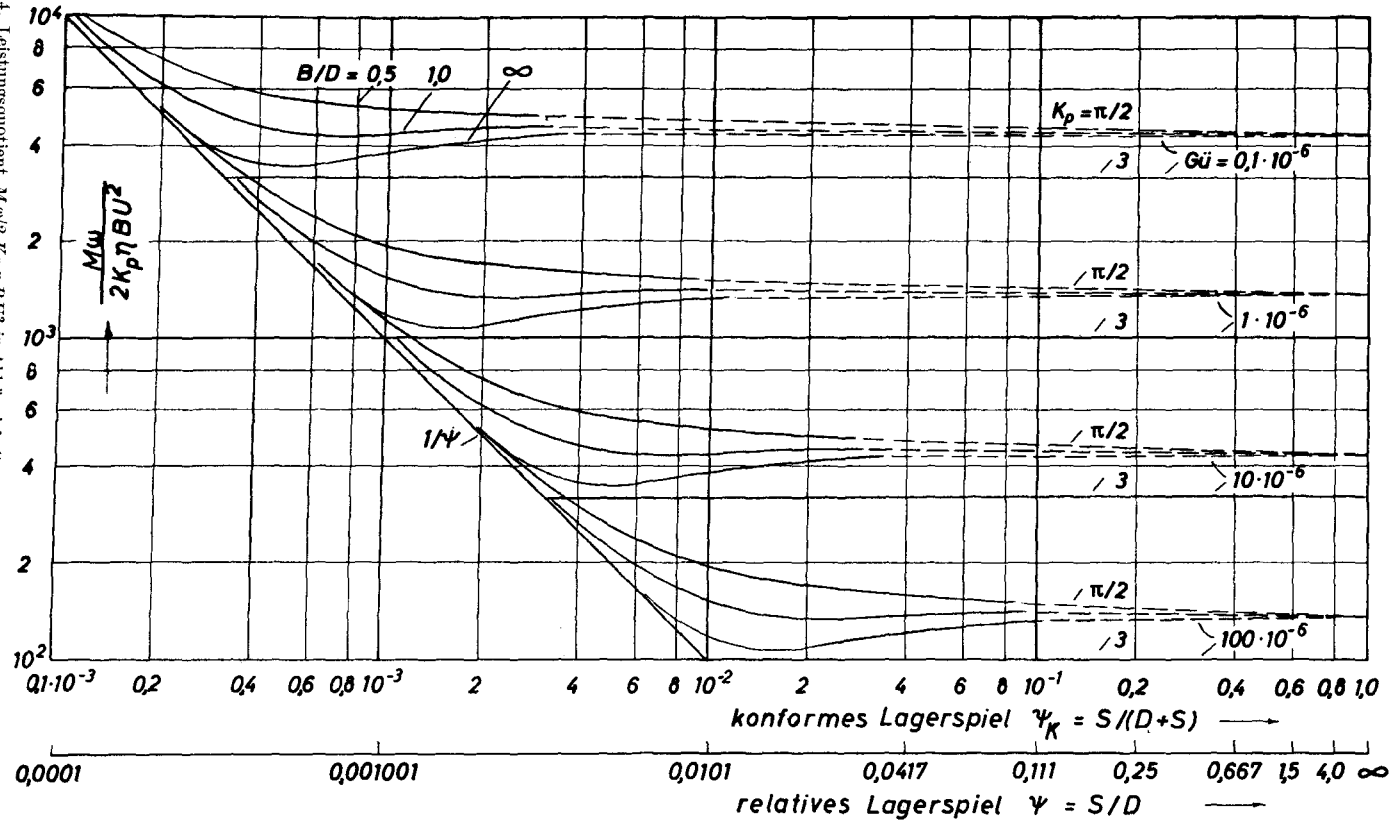
Der Übergang zwischen den beiden Bereichen ist in dieser Darstellung unstetig, für die erwähnten Berechnungen in der Praxis ist das ohne Bedeutung, die Abweichungen bleiben innerhalb der Fehlergrenzen, die auch sorgfältigen Versuchen noch zugebilligt werden müssen. Das schließt aber nicht aus, die genaue Rechnung zu berücksichtigen, zumal sie einfach durchgeführt werden kann, weil alle Unterlagen dafür vorhanden sind.

5. Genaue Rechnungen

Wie schon erwähnt, lassen sich die exakten Beziehungen am Zylinderlager nicht durch analytische Ausdrücke wiedergeben, tabellarisch sind die Grundwerte aber mit genügender Genauigkeit durch die Arbeiten von *H. Sassenfeld* und *A. Walther* (1954) bekannt, sie wurden von *W. Kochanowsky* sorgfältig interpoliert und im Buch des Verfassers (1958) S. 67 und (1967) S. 87 und 90 den Gebrauchsrechnungen zugänglich gemacht. Als Funktion von ε und B/D erscheinen die Sommerfeldzahl So und die Dissipationskennzahl f/ψ . Im allgemeinen ist die Geometrie, also ε , ψ und B/D gegeben, das zugehörige So wird gesucht. Für die Darstellung nach Ziffer 4 wird $Gü$ vorgegeben und mit einem gewählten ε aus dem zugehörigen So das Lagerspiel ψ und aus f/ψ dann der Dissipationsfaktor f ermittelt. Damit können $M \omega$ und $M \omega / 2 K_P \eta B U^2$ sofort angegeben werden: es ist zunächst allgemein

$$\frac{M \omega}{2 K_P \eta B U^2} = \frac{f P}{2 K_P \eta B U} = \frac{f}{K_P Gü} \quad (8)$$

Abb. 4. Leistungsquotient $M\omega/2 K_p \eta B U^2$ in Abhängigkeit vom Lagerspiel, über relatives und konformes Lagerspiel vgl. man Ziffer 7.



In Tabelle 1 sind die Werte von So und f/ψ für $B/D = 1$ und $B/D = \infty$ wiedergegeben, dann sind als Beispiel mit $K_P = \pi/2$, da die verwendeten Rechenergebnisse für das halbumschließende Lager gelten, für $Gü = 10^{-6}$ die entsprechenden Zahlen für ψ , f und $M \omega / \pi \eta B U^2$ mitgeteilt. Es wird etwa für $\varepsilon = 0,8$ und $B/D = 1$ nach der Tabelle $So = 3,45$ und $f/\psi = 1,16$; daraus folgt $\psi^2 = So \cdot Gü = 3,45 \cdot 10^{-6} = 1,86 \cdot 10^{-3}$, $f = 2,16 \cdot 10^{-3}$ und der Leistungsquotient $M \omega / 2 K_P \eta B U^2 = 2 f / \psi Gü = 1375$. In derselben Weise sind für $10^6 Gü = 100, 10,1$ und $0,1$ die Kurven für den Leistungsquotienten berechnet und in Abb. 4 eingetragen. Sie zeigen mit zunehmendem ω einen Übergang in die Parallele zur X -Achse, also Unabhängigkeit von ψ .

6. Der parabolische Zylinder

Um den anderen Sonderfall, Zylinder gegen Ebene, Abb. 3, behandeln zu können, wird der von der Parabel AA und der Ebene eingeschlossene Gleitraum bei ebener Strömung betrachtet. Das Druckgebiet ist klein, die Anpassung der Parabel mit dem Krümmungsradius $\varrho = D/2$ im Scheitel an den Kreiszylinder ist in dem erforderlichen Bereich genügend genau, um Druckentwicklung und Verschiebungswiderstand zu bestimmen. Die Rechnungen sind bereits von *L. Gümbel* (1916) durchgeführt, alle notwendigen Größen wurden erfaßt und in dimensionslosen Ausdrücken, die Druckverteilung als Tabelle angegeben. Hier werden die Formeln nach *L. Gümbel* und *E. Everling* (1925), S. 94 mitgeteilt.

Die Tragfähigkeit ist

$$P = 1,16 \eta 2 \varrho U B / h_0 = 1,16 \eta U B D / h_0 \quad (9)$$

und der Verschiebungswiderstand

$$T = 3,19 \eta U B / h_0 \zeta = 3,19 \eta U B \sqrt{2 \varrho / h_0} = 3,19 \eta U B \sqrt{D / h_0}. \quad (10)$$

In der zweiten und dritten Form ist die von *Gümbel* auf S. 59, Gl. (60) durch

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2 \varrho} = h_0 (1 + \zeta^2 x^2)$$

eingeführte Größe

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2 \varrho h_0}} = \frac{1}{\sqrt{D h_0}}$$

eingesetzt. Wird jetzt D/h_0 aus Gl. (9) in Gl. (10) übernommen, so folgt

$$T = 2,96 \sqrt{P U B \eta}$$

und

$$M \omega = T U = 2,96 U \sqrt{P U B \eta}. \quad (11)$$

Tabelle 1. Zahlenwerte für das halbumschließende Lager mit $Gü = 10^{-6}$

| B/D | $\varepsilon = 2 e/S$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 0,99 |
|----------|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ∞ | So | 0,458 | 0,882 | 1,304 | 1,774 | 2,32 | 3,05 | 4,16 | 6,28 | 12,47 | 24,73 | 122,6 |
| | f/ψ | 3,56 | 2,02 | 1,53 | 1,29 | 1,11 | 0,968 | 0,845 | 0,715 | 0,541 | 0,404 | 0,196 |
| | $10^3 \psi$ | 0,677 | 0,939 | 1,14 | 1,33 | 1,52 | 1,75 | 2,04 | 2,51 | 3,53 | 4,97 | 11,1 |
| | $10^3 f$ | 2,41 | 1,90 | 1,75 | 1,72 | 1,69 | 1,70 | 1,72 | 1,80 | 1,91 | 2,01 | 2,17 |
| | $M\omega/\pi\eta BU^2$ | 1533 | 1207 | 1113 | 1093 | 1076 | 1076 | 1097 | 1141 | 1216 | 1279 | 1382 |
| 1 | So | 0,117 | 0,239 | 0,382 | 0,572 | 0,834 | 1,24 | 1,95 | 3,45 | 8,18 | 18,3 | 99,0 |
| | f/ψ | 14,3 | 7,28 | 4,87 | 3,60 | 2,70 | 2,06 | 1,57 | 1,16 | 0,752 | 0,512 | 0,223 |
| | $10^3 \psi$ | 0,342 | 0,489 | 0,618 | 0,756 | 0,913 | 1,11 | 1,40 | 1,86 | 2,86 | 4,27 | 9,95 |
| | $10^3 f$ | 4,87 | 3,55 | 3,00 | 2,73 | 2,46 | 2,29 | 2,19 | 2,16 | 2,16 | 2,17 | 2,21 |
| | $M\omega/\pi\eta BU^2$ | 3105 | 2266 | 1916 | 1735 | 1570 | 1455 | 1394 | 1375 | 1369 | 1393 | 1405 |

Tangentialschub und dissipierte Leistung enthalten keine Größen mehr, die die geometrische Form beeinflussen, die geringste Schichtdicke h_0 und der Krümmungskreisdurchmesser D sind herausgefallen. Für das Verhalten ist es gleichgültig, ob der Zylinder sich mit U gegenüber der festen Ebene dreht, oder die Ebene mit U an dem ruhenden Zylinder vorbeigleitet.

Der Leistungsquotient wird mit dem Nenner für das halbumschließende Lager, also $K_P = \pi/2$,

$$\frac{M \omega}{\pi \eta B U^2} = \frac{2,96}{\pi} \sqrt{\frac{P}{\eta B U}} = \frac{1,33}{\sqrt{Gü}}. \quad (12)$$

Die zahlenmäßigen Unterschiede der nach Gl. (12) errechneten Werte gegenüber denen für das halbumschließende Lager nach Ziffer 5 für $\varepsilon = 0,99$ sind gering, danach wäre für $Gü = 10^{-6}$ der Leistungsquotient 1382, nach Gl. (12) wird er 1330, also 3,9 % kleiner. Daher erscheint die Annahme eines stetigen Übergangs mit wachsendem Lagerspiel bis zum Zylinder gegen Ebene gerechtfertigt.

Die Gl. (11) ist bereits von der geometrischen Form unabhängig, dasselbe gilt für Gl. (12).

7. Der parabolische Zylinder als Näherung für das Radiallager

L. Gümbel untersuchte Tragfähigkeit und Verschiebungswiderstand verschiedener Spaltformen, darunter auch für die Anwendung auf Zahnräder den von Zahnflanken begrenzten Gleitraum, dessen Gestalt durch die Flächen parabolischer Zylinder mit ausreichender Genauigkeit wiedergegeben wird. Gümbel (1916) zeigte, daß der zwischen zwei Parabelflächen mit den Scheitel-Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 eingeschlossene Gleitraum die gleiche Höhe h hat wie der zwischen einer Parabelfläche vom Scheitel-Krümmungsradius ϱ , wobei $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} \pm \frac{1}{\varrho_2}$ ist, und einer Ebene eingeschlossenen Raum mit der Höhe h_0 im Scheitel der Parabeln.

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2 \varrho_1} \pm \frac{x^2}{2 \varrho_2} = h_0 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{\varrho_1} \pm \frac{1}{\varrho_2} \right) = h_0 + \frac{x^2}{2 \varrho}. \quad (13)$$

Abb. 5 zeigt den Inhalt der Gl. (13) für $\varrho_2 = 3 \varrho_1$, das liefert dann $\varrho = 1,5 \varrho_1$, wenn das Lager, also das negative Vorzeichen in Gl. (13) betrachtet wird.

Das positive Vorzeichen gilt für Krümmungskreise, die sich bei $h_0 = 0$ von außen, das negative für solche, die sich von innen berühren würden; dieser Fall entspricht dem des Lagers. Dafür wird dann nach Gl. (13) mit $2 \varrho_1 = D$ und $2 \varrho_2 = D + S$

$$\frac{1}{2 \varrho} = \frac{1}{D} - \frac{1}{D + S} = \frac{1}{D} \cdot \frac{S}{(D + S)} = \frac{\psi_K}{D}. \quad (14)$$

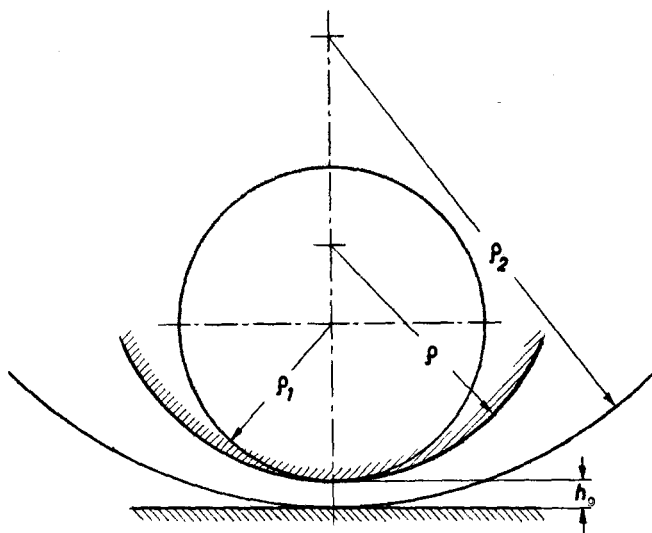


Abb. 5. Ersatz von Zylinder (Radius ρ_1) im Innenzylinder (Radius $\rho_2 = 3 \rho_1$) durch Zylinder gegen Ebene (resultierender Radius $\rho = 3 \rho_1/2$).

Die darin auftretende Größe ψ_K

$$\psi_K = \frac{S}{D + S} = \frac{\psi}{1 + \psi}, \quad \psi = \frac{\psi_K}{1 - \psi_K}, \quad (15)$$

soll als „konformes Lagerspiel“ bezeichnet werden. Für ψ in der gewohnten Größenordnung von einigen Promillen unterscheiden sich ψ und ψ_K kaum, wie die nachstehende Übersicht zeigt:

| | | | | | | | | |
|-----------------|----------|---------|--------|---------|-------|-------|-------|----------|
| $\psi_K = 0,01$ | $0,04$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,4$ | $0,6$ | $0,8$ | $0,9$ | $1,0$ |
| $\psi = 0,0101$ | $0,0104$ | $0,111$ | $0,25$ | $0,667$ | $1,5$ | $4,0$ | $9,0$ | ∞ |

Erst wenn S in die Größenordnung von $0,1 D$ kommt, werden die Abweichungen größer, mit $S \rightarrow \infty$ geht $\psi_K \rightarrow 1$, das gilt dann für den Zylinder gegen Ebene.

Mit den Gln. (14) und (15) werden nun die Beziehungen zwischen Lager und parabolischem Zylinder hergestellt, dafür ist $2 \rho = D/\psi_K$ in die Gln. (9) und (10) einzusetzen, das ergibt, wenn $2 h_0 = S (1 - \varepsilon)$ für das Zylinderlager mit berücksichtigt wird,

$$P = 1,16 \eta U B D / h_0 \psi_K = 1,16 \frac{2 \eta U B D}{S (1 - \varepsilon) \psi_K} = 2,32 \frac{\eta U B}{(1 - \varepsilon) \psi_K^2}, \quad (16)$$

während sich für T dieselbe Gl. (11) und ebenso $M \omega = T U$ wie unter Ziffer 6 ergibt. Die Gl. (16) läßt sich in der Form

$$\frac{P \psi_K^2}{2 \eta U B} = S_0 = \frac{1,16}{1 - \varepsilon} \quad (17)$$

schreiben, das ist eine gute Näherung für das Zylinderlager, bei dem $\psi_K \approx \psi$ wird. Für $\varepsilon > 0,5$ ergibt sich die nachstehende Übersicht

| | | | | | | |
|---------------------|--------|------|------|------|-------|--------|
| $\varepsilon = 0,5$ | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 0,99 |
| So nach Tabelle 1 | = 2,32 | 3,05 | 4,16 | 6,28 | 12,47 | 24,73 |
| So nach Gl. (17) | = 2,32 | 2,90 | 3,87 | 5,80 | 11,60 | 23,2 |
| | | | | | | 116,0. |

Die Anwendung der Gleichungen für den parabolischen Zylinder als Näherung für das Radiallager nach dem Vorgehen von *Gümbel* ist daher wohl gerechtfertigt. Für $\psi_K = 1$, dem konformen Lagerspiel für S und ψ gleich ∞ , gehen die Näherungsgleichungen in die des parabolischen Zylinders über, die Ausdrücke für $M \omega$ unterscheiden sich gar nicht, weil sie ψ und ψ_K nicht enthalten. *Damit ist der Widerstand im Radiallager unabhängig von der geometrischen Form.*

Zu beachten ist jedoch, daß diese Unabhängigkeit erst von einer gewissen Exzentrizität $\varepsilon \approx 0,5$ an (bei einem üblichen B/D) gültig wird, nämlich in dem der Schwerlast zugeordneten Bereich, wenn $So > 1$ ist. Im Schnellaufbereich gilt die geometrieabhängige Gl. (6) nach *Petroff*; das Vorhandensein zweier verschiedener Bereiche für die zur Überwindung des Laufwiderstandes aufzuwendende Leistung war *Gümbel* noch unbekannt.

Statt des Zahlenfaktors 2,96 in Gl. (11) erscheint in Gl. (1) mit dem für praktische Rechnungen empfohlenen $K_G = 3$ der Wert 4,25. Der Unterschied ist zunächst auf die in den vorhergehenden Gleichungen verwendete Beschränkung auf zweidimensionale, also durch B nicht beeinflusste Strömung zurückzuführen; darüber hinaus erfaßt die Rechnung nur das druckerfüllte, also tragende Gebiet des Gleitraumes, das Öl im restlichen Teil liefert auch noch eine, wenn auch durch Rechnung nicht leicht erfaßbare Vermehrung des Widerstandes. Den für Gl. (1) empfohlenen Faktor $K_G = 3$ stützen vertiefte Rechnungen, viele Experimente und Erfahrungen aus der Praxis.

Hier sollen in erster Linie die Zusammenhänge betrachtet werden, dafür genügt die *Gümbelsche* Näherung auch zahlenmäßig schon, sie liefert in ihrer Klarheit eine überzeugende Darstellung für die Unabhängigkeit der aufzuwendenden Leistung von der geometrischen Form beim Zylinderlager bis zu unendlich großem Lagerspiel, also Zylinder gegen Ebene.

8. Beispiele

Von Interesse ist nun, wie sich in der Darstellung nach Abb. 4 die ausgeführten Lager verhalten. Solange $So < 1$ bleibt, liegen die Betriebspunkte auf der $1/\psi$ -Geraden, je nach dem Wert von ψ . Für $So > 1$ gibt es viele Möglichkeiten; um diese aufzuzeigen, ist in Abb. 6 eine Auswahl der Beispiele aus dem Buch des Verfassers (1958, 1967) eingetragen. Allerdings sind in den Beispielen 1 und 2 zunächst willkürliche, aber reale Zahlen gewählt, die im ersten $So = 1$, im zweiten $So = 100$ ergeben, dabei ist das Lagerspiel $\psi = 10^0/00$ wohl etwas groß angenommen, aber in Versuchswesen kommen solche Werte vor, wie Beispiel 26 zeigt.

Die einzelnen Daten sind in Tabelle 2 zusammengestellt, sie läßt erkennen, daß recht verschiedenartige Abmessungen, Belastungen, Drehzahlen und Viskositäten denselben Leistungsquotienten ergeben können, wie etwa das E-Motorenlager Nr. 6 mit $P = 120 \text{ kp}$, $\psi = 1,6^0/00$ und das Eisenbahnachslager Nr. 14 mit $P = 6000 \text{ kp}$ und $\psi = 35^0/00$, für beide ergibt sich $M \omega/6 \eta B U^2 = 625$.

Bei Stanton (1923) S. 109 wurde mit der Vorzahl $K_G = 2,2$ gerechnet, einem Wert, der sich aus den mitgeteilten f -Werten seiner Versuche mit dem großen Lagerspiel ergibt.

Für die Auftragung der Versuche von Drescher nach dem Bericht des Verfassers (1962) wurden die nicht ausgeglichenen So-Werte genommen, da nur diese mit den sonstigen Angaben der Tabelle eine rechnerische Übereinstimmung ergeben.

Wird Gl. (1) für $M \omega$ mit $K_G = 3$ verwendet, so ergibt $M \omega/6 \eta B U^2 = \sqrt{So/\psi}$,

Tabelle 2. Beispiele für den Leistungsquotienten $M \omega/6 \eta B U^2$ für ausgeführte oder Versuchslager

| Nr. | D mm | B mm | P kp | n U/min | U m/s | $10^3 \psi$ — | η cP |
|-----|-----------|-----------|----------------|--------------|------------|------------------|--------------|
| 1 | 100 | 100 | 2 000 | 955 | 10,0 | 1,0 | 10 |
| 2 | 100 | 100 | 2 000 | 955 | 10,0 | 10,0 | 10 |
| 3 | 125 | 120 | 3 000 | 500 | 3,27 | 1,6 | 29 |
| 4 | 125 | 120 | 500 | 1 000 | 6,55 | 1,6 | 18 |
| 5 | 140 | 140 | 2 450 | 1 350 | 9,9 | 1,43 | 17 |
| 6 | 75 | 170 | 120 | 965 | 3,79 | 1,6 | 36 |
| 7 | 75 | 170 | 1 120 | 965 | 3,79 | 1,6 | 36 |
| 8 | 1 100 | 900 | $2 \cdot 10^6$ | 24 | 1,38 | 1,2 | 350 |
| 9 | 40 | 40 | 240 | 50 000 | 104,8 | 5,0 | 16 |
| 10 | 250 | 250 | 15 000 | 165 | 2,16 | 0,2 | 30 |
| 11 | 115 | 190 | 12 000 | 477 | 2,88 | 35 | 36 |
| 12 | 115 | 190 | 10 000 | 636 | 3,84 | im | 29 |
| 13 | 115 | 190 | 7000 | 848 | 5,11 | neuen | 25 |
| 14 | 115 | 190 | 6 000 | 716 | 4,32 | Zustand | 100 |
| 15 | 25,4 | 63,5 | 313 | 1 000 | 1,33 | 20 | 32 |
| 16 | 25,4 | 63,5 | 313 | 1 000 | 1,33 | 20 | 76 |
| 17 | 25,4 | 63,5 | 313 | 1 000 | 1,33 | 60 | 114 |
| 18 | 25,4 | 63,5 | 313 | 1 000 | 1,33 | 60 | 187 |
| 19 | 50 | 22 | 2 200 | 500 | 1,31 | 1,0 | 30,5 |
| 20 | 50 | 22 | 2 260 | 500 | 1,31 | 1,4 | 30,0 |
| 21 | 50 | 22 | 3 050 | 500 | 1,31 | 2,0 | 35,3 |
| 22 | 50 | 22 | 2 940 | 750 | 1,96 | 3,0 | 34,0 |
| 23 | 50 | 22 | 2 550 | 500 | 1,31 | 4,0 | 56,8 |
| 24 | 50 | 22 | 1 650 | 750 | 1,96 | 6,0 | 30,8 |
| 25 | 50 | 22 | 1 650 | 750 | 1,96 | 8,0 | 38,0 |
| 26 | 50 | 22 | 1 950 | 750 | 1,96 | 10 | 34,7 |

also eine einfache Rechnung im Falle $So > 1$; ist dagegen $So < 1$, so sind die Zusammenhänge noch einfacher, dann gilt Gl. (7). Diese Beziehungen sind für die Kontrolle der Rechnungen mit Vorteil anzuwenden.

Wichtig ist weiter für unsere Betrachtungen, daß eindeutige Versuchsergebnisse für den Zylinder gegen die Ebene, also für $\psi = \infty$ oder $\psi_K = 1$ vorliegen. Es sind die Untersuchungen von *G. Niemann* und *K. Banaschek* (1953); aus dem Bild 45 der Originalarbeit von *Banaschek* sind in unserer Abb. 7 die Kurven für f wiedergegeben. Diese stimmen fast mit den f -Kurven aus dem Bild 5 der Veröffentlichung von *Niemann-Banaschek* überein, die dafür verwendeten Versuchsergebnisse sind aber mit einem Öl durchgeführt, das Strukturviskosität aufweisen kann. Die Kurven für $P/B = 100$ kp/m zeigten Abweichungen gegenüber der Rechnung, die auf eine solche Eigenschaft zurückgeführt werden könnten. Im übrigen unterscheiden sich die umfangreichen Messungen mit Durchmessern von 10 bis 200 mm und verschiedenen Ölen nur unwesentlich voneinander, so daß die Abb. 7 als repräsentativ für

Tabelle 2. Beispiele für den Leistungsquotienten $M \omega / 6 \eta BU^2$ für ausgeführte oder Versuchslager

| Nr. | 10^6 Gü — | So — | $M \omega$ mkp/s | $6 \eta BU^2$ mkp/s | $M \omega /$ $6 \eta BU^2$ | $10^3 f$ — | Quelle — |
|-----|------------------------|-----------|---------------------|------------------------|-------------------------------|---------------|--|
| 1 | 1,0 | 1,0 | 60,0 | 0,06 | 1000 | 3,0 | siehe Text |
| 2 | 1,0 | 100 | 60,0 | 0,06 | 1000 | 3,0 | siehe Text |
| 3 | 0,758 | 3,38 | 25,7 | 0,0223 | 1150 | 2,62 | BG II, Beispiel 1 |
| 4 | 5,65 | 0,453 | 34,7 | 0,0588 | 625 | 10,7 | BG II, Beispiel 4 |
| 5 | 1,92 | 1,07 | 101 | 0,14 | 723 | 4,16 | BG II, Beispiel 6 |
| 6 | 38,7 | 0,0662 | 33,0 | 0,0528 | 625 | 72,5 | BG II, Beispiel 5 |
| 7 | 4,14 | 0,618 | 33,0 | 0,0528 | 625 | 7,8 | BG II, Beispiel 5 |
| 8 | 0,0435 | 33,1 | 1725 | 0,36 | 4800 | 0,63 | BG II, Beispiel 7 |
| 9 | 56,0 | 0,447 | 845 | 4,21 | 200 | 33,5 | BG II, Beispiel 12 |
| 10 | 0,216 | 0,185 | 105 | 0,0210 | 5000 | 9,1 | BG II, Beispiel 11 |
| 11 | 0,328 | 3740 | 60,0 | 0,0340 | 1760 | 1,73 | BG I, Beispiel 48 |
| 12 | 0,423 | 2900 | 75,5 | 0,0486 | 1550 | 1,96 | BG I, Beispiel 48 |
| 13 | 0,694 | 1765 | 88,0 | 0,0730 | 1200 | 2,46 | BG I, Beispiel 48 |
| 14 | 2,80 | 437 | 127 | 0,2030 | 625 | 4,90 | BG I, Beispiel 48 |
| 15 | 1,73 | 232 | 1,20 | 0,00216 | 556 | 2,88 | } <i>T. E. Stanton</i> Friction (1923) S.109 |
| 16 | 4,08 | 98 | 1,85 | 0,00514 | 360 | 4,34 | |
| 17 | 6,13 | 587 | 2,28 | 0,0077 | 296 | 5,50 | |
| 18 | 10,1 | 358 | 2,92 | 0,0126 | 232 | 7,02 | } Konstruktion 14 (1962) S. 467 |
| 19 | 0,080 | 12,5 | 2,44 | 0,000693 | 3510 | 0,850 | |
| 20 | 0,0895 | 22 | 2,87 | 0,000796 | 3350 | 0,90 | |
| 21 | 0,114 | 60 | 3,10 | 0,000802 | 3870 | 0,775 | |
| 22 | 0,264 | 90 | 5,47 | 0,00174 | 3160 | 0,950 | |
| 23 | 0,119 | 125 | 3,60 | 0,00129 | 2790 | 1,075 | |
| 24 | 0,133 | 224 | 3,90 | 0,001565 | 2500 | 1,205 | |
| 25 | 0,168 | 322 | 4,33 | 0,00193 | 2240 | 1,340 | |
| 26 | 0,154 | 650 | 4,49 | 0,00176 | 2550 | 1,180 | |

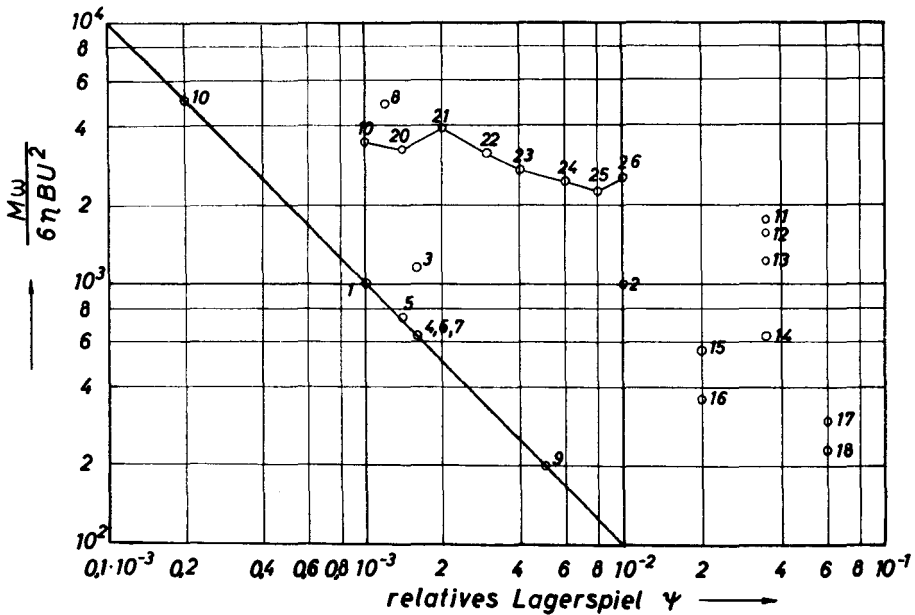


Abb. 6. Beispiele für den Leistungsquotienten in der Darstellung der Abb. 2. Daten für die einzelnen Punkte in Tabelle 2.

die Gesamtheit der *Banaschekschen* Versuche angesehen werden kann. Für $f = M \omega / P U$ nach Gl. (3) liefert Gl. (11) sofort

$$f = 2,96 \sqrt{\frac{\eta U}{P/B}}, \quad (18)$$

die bei *Gümbel-Everling* (1925) S. 94 zu finden ist. Für die Rechnung wurde die Viskosität des zufließenden Öles $\eta = 1 \cdot 10^{-6} \text{ kps/cm}^2 = 100 \cdot 10^{-4} \text{ kps/m}^2 \approx 100 \text{ cP}$ eingesetzt, damit wird

$$f = 2,96 \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-4} U}{P/B}} = 0,296 \sqrt{\frac{U}{P/B}},$$

mit U in m/s und P/B in kp/m, während die Daten bei *Niemann-Banaschek* mit U in cm/s und P/B in kp/cm gegeben sind. Wie Abb. 7 zeigt, stimmen Rechnung und Messung gut überein, die gemessenen f -Werte liegen bis $U \approx 5 \text{ m/s}$ zwar über den gerechneten, das hat seine Ursache in dem Einfluß von Festkörperanteilen in der Nähe oder bereits im Bereich partiellen Tragens; auch können hier Deformationen des Gleitraums die Druckentwicklung beeinflussen. Über $U \approx 5 \text{ m/s}$ werden die f kleiner, das ist auf die Abnahme der Viskosität mit der Temperatur zurückzuführen.

In der Veröffentlichung sind auch die Temperaturen des abfließenden Öles mit angegeben, nimmt man für diese die zugehörigen Viskositäten, dann ist die

Übereinstimmung zufriedenstellend. Die Korrektur ist nur für die Geschwindigkeit $U = 13 \text{ m/s}$ durchgeführt, die eingetragenen Punkte entsprechen den korrigierten Werten. Man könnte den ganzen Kurvenverlauf für $U > 5 \text{ m/s}$ leicht berichtigen, davon wurde abgesehen, weil das dann auch für $U < 5 \text{ m/s}$ erfolgen müßte, hier aber im Bereich des partiellen Tragens sind die Möglichkeiten dafür aus den vorhandenen Unterlagen nicht gegeben.

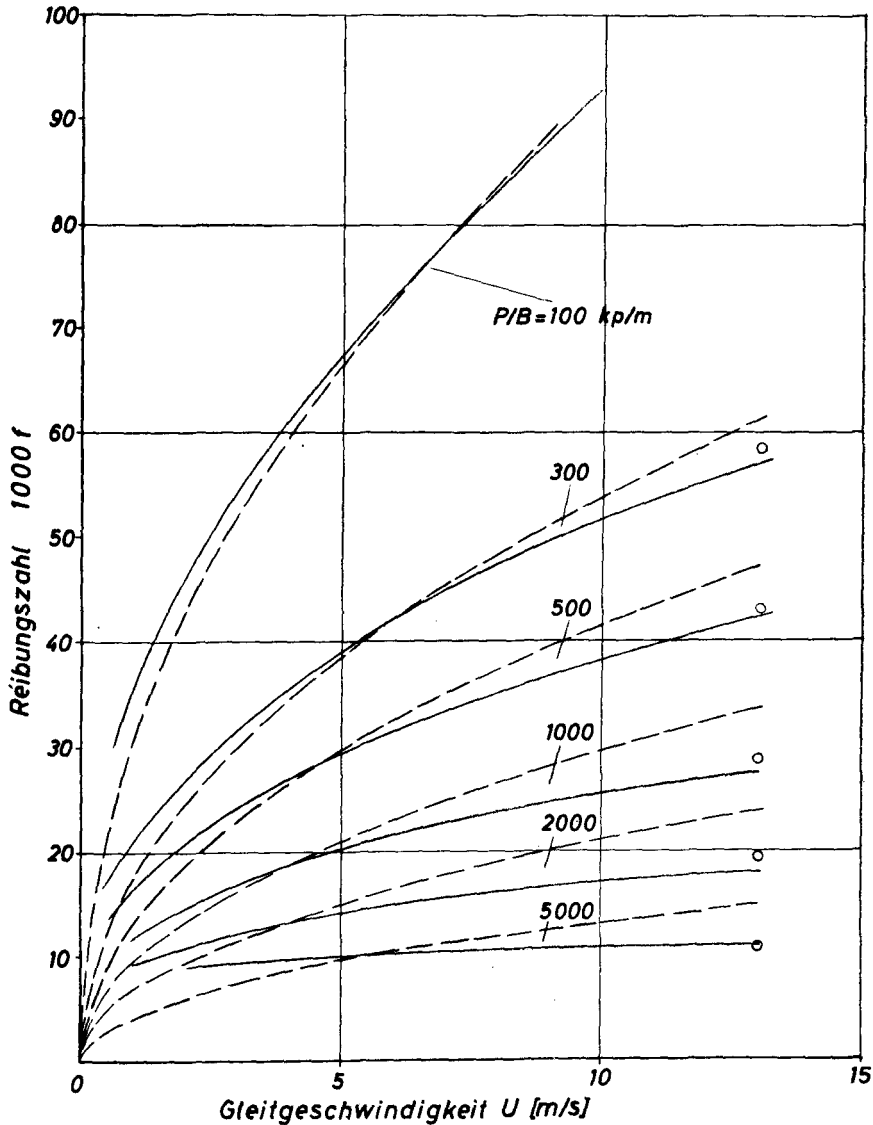


Abb. 7. Messungen von Banaschek: Zylinder gegen Ebene (ausgezogene Kurven) im Vergleich mit der Rechnung für konstante Viskosität (gestrichelte Kurven). Die kleinen Kreise am Ende der Kurven geben die Rechnung mit der Viskosität des abfließenden Öls wieder.

9. Der Dissipationsfaktor als geometrischer Ausdruck

In den vorhergehenden Ausführungen wurde erstmalig über die Abhängigkeit der Energieverluste von der geometrischen Form gesprochen. Zwar beachtete man auch früher schon die Beziehungen zwischen den Reibungserscheinungen und der geometrischen Form, doch beschränkte man sich auf die Reibungszahl. So hat *Gümbel* (1917) S. 256 darauf hingewiesen, daß die Reibungszahl zu einem rein geometrischen Begriff werden kann, der keine physikalischen Größen mehr enthält. Bildet man aus den Gln. (9) und (10) den Quotienten T/P , so folgt

$$f = 2,75 \sqrt{h_0/D}, \quad (19)$$

ein Ausdruck, der nur die Abmessungen h_0 und D enthält, mit denen die Geometrie des Spaltverlaufs eindeutig beschrieben ist. Weitere Hinweise auf die Reibungszahl als einem rein geometrischen Begriff finden sich in *Gümbel-Everling* (1925) S. 74 Gl. (90) für den ganz abgesperrten, S. 75, Gl. (93) für den teilweise abgesperrten Querschnitt, S. 93 (Gl. 135) für den parabolischen Halbzylinder und unsere Gl. (19). Für die Verschiebung schräggestellter Platten wird auf S. 83 die Gl. (114) als geometrischer Begriff gekennzeichnet, ähnlich wie auf S. 86 die Gl. (123).

Wenn damit auch auf enge Beziehungen zwischen Geometrie und Reibungsverhalten hingewiesen ist, so sind diese nicht weiter beachtet und auf eine Vertiefung der Zusammenhänge hin untersucht worden.

Wilcock und *Booser* (1956) sprechen auf S. 314/15, 322/23, 330, 336 und 338 deutlich von der Lager-Geometrie, beschränken sich aber auf deren Beschreibung, ohne auf die daraus folgenden physikalischen Geschehnisse näher einzugehen, ebenso ist das bei den von *D. Fuller* (1956) auf S. 154/160 beschriebenen Spaltformen der Fall.

Lord Rayleigh (1918) zeigte schon, daß das Staurandlager, der teilweise abgesperrte Querschnitt mit den Abmessungen Staufeldlänge = $0,7182 \times$ Gesamtlänge und größte Spaltweite = $1,866 \times$ engster Spaltweite die höchste Tragfähigkeit hat. Diese Angaben beziehen sich auf das Lager ohne Seitenfluß; bei endlicher Breite ergibt sich für den U-förmigen Stufen-Spalt ebenfalls die maximale Tragfähigkeit, nur sind die Zahlenfaktoren etwas anders, darüber vergleiche man die Arbeiten von *H. Drescher*.

10. Folgerungen

Die bei der Gleitbewegung sich berührender Festkörper auftretenden Kräfte und Verluste an Energie und Material hängen in weit höherem Maße von der geometrischen Form der Gleitpartner als von deren Stoffeigenschaften ab. Wie es scheint, gibt es nur einen Fall, in dem eine weitgehende Unabhängigkeit der Energieverluste von der Geometrie sowohl rechnerisch als auch experimentell nachzuweisen ist: Das zylindrische Radiallager im Schwerlastbereich; das Lagerspiel darf dabei beliebig groß werden, wird es unendlich, so entspricht das dem Fall des Zylinders gegen die Ebene.

Die Erkenntnis der Abhängigkeit des Reibungsgeschehens von der geometrischen Form ist bisher weder ausgesprochen noch beachtet worden, und doch ist sie von großer Wichtigkeit. Viele Versuchs- und Prüfgeräte, in denen einfache geometrische Formen als Gleitpartner verwendet werden, sind für Laboratorien gebaut und werden teilweise sogar handelsmäßig vertrieben:

Punktberührung: Kugel gegen Kugel (*Boerlage*, Vierkugelapparat)
 Rotationskörper gegen drei Kugeln (Vorschlag einer Materialprüfungsanstalt, Abwandlung des Vierkugelapparates)
 Kugel gegen Ebene (*Bowden*, pin-on-disk-Geräte)
 Zylinder gegen Zylinder außen gekreuzt
 (*Thoma* u. andere)

Linienberührung,
 Bewegung quer zur

Berührungslinie: Zylinder gegen Zylinder außen parallel (*Bartel*)

Linienberührung,
 Bewegung in der

Berührungslinie: Kugel gegen Innenkegel (Vorschlag einer Materialprüfungsanstalt)

Zylinder gegen Zylinder innen (*Almen*, *Almen-Wieland*)

Zylinder gegen Ebene (einfach: *Timken*, vierfach: *Falex*)

Flächenberührung: Ebene gegen Ebene, Kreisringflächen gegen Kreisringflächen (*Woodburry*, *Wendt*, *Siebel-Kehl*)

Ebene gegen Ebene, kleine Kreisflächen gegen rotierende Scheibe (*Deeley*, *Herschel*)

Ebene gegen Ebene, Rechteckflächen (*Merchant*, *Tannert*).

Wie man sieht, werden vielerlei Kombinationen versucht. Große Verwunderung herrscht darüber, daß diese Prüfgeräte keine übereinstimmenden Ergebnisse liefern, ferner, daß die Ergebnisse vielfach mit den Erfahrungen der Praxis nicht in Einklang stehen. Die Ursache liegt darin, daß die Abhängigkeit der Reibung von der geometrischen Form nicht beachtet wurde und auch darin, daß für die Prüfgeräte geometrische Paarungen verwendet werden, die der Maschinenbau zur Übertragung von Kräften nicht verwendet, weil die Spannungen in den Berührungsflächen zu groß werden.

Ein weiteres eindrucksvolles Beispiel liefert die Mechanik geschütteter Körper. Jedermann ist bekannt, daß aufgeschütteter Sand eine geneigte Oberfläche zur Horizontalen bildet, der dazwischen entstehende Winkel heißt Böschungswinkel. Er wird meist in Abhängigkeit von den Materialien in den Lehr- und Handbüchern angegeben, für feuchten Sand 27° , für trockenen Sand 32° und für Gas- oder Zechenkoks 45° , um einige Zahlen zu nennen; Werte über 50° hinaus sind nicht zu finden. Der Böschungswinkel kann als ein Maß für die Reibung der Sandkörper gegeneinander angesehen werden.

Bei dem Versuch, Kräfte und Spannungen im Inneren einer Sandmasse durch rechnerische Beziehungen zu erfassen, wird vielfach das Sandkorn durch geometrisch eindeutige Körper ersetzt. Mit Kugeln auf einer glatten Oberfläche wird aber kein Böschungswinkel erhalten, jede zweite Schicht bringt die

untere Schicht ins Rollen, und das Ergebnis ist eine gleichmäßige Kugelschicht über der Grundfläche: Die Verwendung der Kugel als Modell des Sandkorns liefert den Böschungswinkel Null.

Anders ist es, wenn regelmäßige Vielflächner herangezogen werden, der einfachste davon ist der Würfel. Lose aufgeschüttete Würfel würden einen Böschungswinkel bilden, aber durch eine regelmäßige Packung, wie sie auch bei den Kugelmodellen vorausgesetzt wird, kann man eine senkrechte Wand erreichen, also den Böschungswinkel 90° . Man ist also, um den wirklichen Böschungswinkel zu erhalten, weitgehend an die geometrische Form des Sandes oder der jeweiligen geschütteten Materie gebunden. Andere geometrische Formen liefern ganz andere Ergebnisse, selbst wenn sie aus dem gleichen Material sind wie etwa Quarzsand und Quarzkugeln.

Hier ist noch manche offene Frage zu beantworten, die vorliegende Arbeit ist nur ein erster Beitrag in dieser Richtung.

Literatur

- Couette, M. M.*: Études sur le Frottement des Liquides. Annales de Chimie et de Physique. VI. Serie 21 (1890) 433/510.
- Drescher, H.*: Gleitlager mit Luftschmierung. Z. VDI 95 (1953) 1182/1190.
- Drescher, H.*: Gasgeschmierte Lager. Schmieretechnik 8 (1961) 237/248 und 315/323.
- Drescher, H.*: Axial-Gleitlager mit stufenförmigem Schmierspalt (Staurandlager) Konstruktion 17 (1965) 341/349 und 393/402.
- Fuller, D. D.*: Theory and Practice of Lubrication for Engineers. New York: Wiley London: Chapman & Hall 1956.
- Gümbel, L.*: Das Problem der Lagerreibung. Mbl. Berlin. Bez.-Ver. dtsch. Ing. 5 (1914) 87/104 und 109/120.
- Gümbel, L.*: Über geschmierte Arbeitsräder. Z. für das gesamte Turbinenwesen 13 (1916) 205/209, 220/223, 225/228, 239/241, 245/248, 258/262 und 268/272.
- Gümbel, L.*: Der Einfluß der Schmierung auf die Konstruktion. Jb. schiffbautechn. Ges. 18 (1917) 236/322.
- Gümbel, L. und E. Everling*: Reibung und Schmierung im Maschinenbau. Berlin: Krayn 1925.
- Hersey, M. D.*: The Laws of Lubrication of Horizontal Journal Bearings. J. Washington Acad. Sci. 4 (1914) 542/552.
- Niemann, F. und K. Banaschek*: Der Reibwert bei geschmierten Gleitflächen. Z. VDI 95 (1953) 167/173.
- Petroff, N.*: Neue Theorie der Reibung. Urschrift (russisch) 1883. Deutsche Übersetzung von L. Wurzel 1887, Hamburg: Leopold Voss; auch Ostwalds Klassiker Nr. 218. Abhandlungen über die hydrodynamische Theorie der Schmiermittelreibung. Leipzig: Akad. Verlags-Ges. 1927.
- Lord J. W. Rayleigh*: Notes on the Theory of Lubrication. Phil. Mag. and Journ. of Science 35 (1918) 1/12.
- Sassenfeld, H. und A. Walther*: Gleitlagerberechnungen. VDI-Forsch.-Heft 441, 1954.
- Stanton, T. E.*: Friction. London: Longmans, Green and Co. 1923.
- Vogelpohl, G.*: Betriebssichere Gleitlager. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1. Aufl. 1958, 2. Aufl. 1967.
- Vogelpohl, G.*: Geringste zulässige Schmierschichtdicke und Übergangsdrehzahl. Konstruktion 14 (1962) 461/468.
- Wilcock, D. F. und E. R. Booser*: Bearing Design and Application. New York/Toronto/London: McGraw-Hill Book Company Inc. 1957.